

Analysis 1 Plenum

Forschendes Lernen

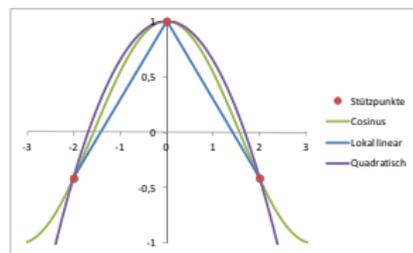
Universität Bremen

WS 2012/2013

Interpolation

Kompliziertes durch Einfaches annähern

- ▶ Ausgangssituation: einzelne Datenpunkte, z.B. aus Messungen
- ▶ Wie kann man zu Zwischenwerten kommen?
- ▶ Abschnittsweise oder globale Interpolation?
- ▶ Mehr Datenpunkte = bessere Interpolation?
- ▶ Wie schlimm sind Ungenauigkeiten im Ausgangsmaterial?

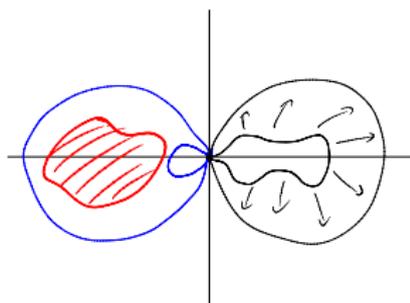


Teilbarkeitsregeln

- ▶ Bekannt: Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- ▶ Wie begründet sich diese Regel?
- ▶ Gibt es eine Teilbarkeitsregel für die 7?
- ▶ Sind die Regeln abhängig davon, dass man im 10er-System rechnet?
- ▶ Gibt es Teilbarkeitsregeln im Binärsystem?

Schleifen in der Ebene

- ▶ Situation: geschlossene Kurven mit Basispunkt $(0, 0)$ in der Ebene \mathbb{R}^2
- ▶ Kann man je zwei solche Kurven ineinander verformen?
- ▶ Ist die „Geschwindigkeit“, mit der man die Kurven durchläuft, relevant?
- ▶ Was passiert, wenn man Hindernisse in der Ebene platziert, die von den Kurven nicht berührt werden dürfen?



Reelle Zahlen

- ▶ $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ durch Hinzufügen der negativen Zahlen, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ durch Bilden von Brüchen und „für gleich erklären“ (z.B. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$)
- ▶ Wie kommt man zu \mathbb{R} ?
- ▶ Welche Eigenschaften zeichnen \mathbb{R} aus?
- ▶ Warum nimmt man \mathbb{R} und nicht z.B. $\mathbb{Q} + \{\text{Wurzeln}\}$?
- ▶ Gibt es andere Zahlengebilde mit ähnlichen Eigenschaften?

Auswahlaxiom

► Äquivalente Aussagen:

- „Das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} A_i$ einer nichtleeren Familie von nichtleeren Mengen $\{A_i\}_{i \in I}$ ist nicht leer.“

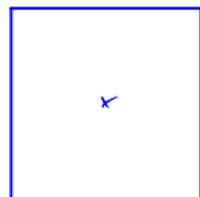
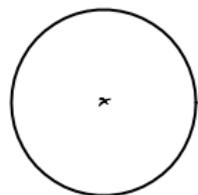
$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i \right\}$$

- „Jede Menge kann wohlgeordnet werden (d.h. es gibt eine totale Ordnung, bzgl. der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt).“
- „Jede halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.“
- Was ist die Bedeutung dieser Aussagen für die Mathematik?

Abstand

Abstandsmessung zwischen Punkten in der Ebene

- ▶ Ausgangspunkt: ein Abstandsbegriff d , z.B. für $x, y \in \mathbb{R}$: $d(x, y) = |x - y|$
- ▶ Welche Eigenschaften wünscht man sich für einen Abstandsbegriff?
- ▶ „Kugel“ bezüglich dieses Abstands:
 $B_\epsilon(x) := \{y \mid d(x, y) < \epsilon\}$
- ▶ Wie sehen Kugeln für verschiedene Metriken in der Ebene aus?
- ▶ Gibt es Beziehungen zwischen diesen Kugeln?

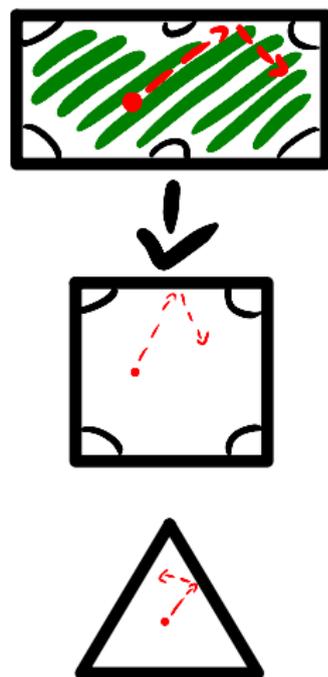


Primzahlen

- ▶ Definition (für $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$)
 1. $p|ab \Rightarrow p|a$ oder $p|b$
 2. $a|p \Rightarrow a = 1$ oder $a = p$
- ▶ Sind die Definitionen gleichwertig? Was ist, wenn $p \in \mathbb{Z}$?
- ▶ Gibt es Primzahlen in \mathbb{Q} oder \mathbb{C} (oder anderen Gebilden die „größer“ als \mathbb{Z} sind)?
- ▶ Wie prüft man, ob eine Zahl eine Primzahl ist?
- ▶ Wie zerlegt man eine Zahl in ihre Primfaktoren?
- ▶ Wie viele Primzahlen gibt es?
- ▶ Haben Primzahlen Anwendungen außerhalb der mathematischen Theorie?

Billard

- ▶ Physikalische Betrachtungen
 - ▶ Impuls- und Energieerhaltung bei Kugelberührungen
 - ▶ Wie ändern sich die Bewegungsrichtungen der Kugeln?
- ▶ Mathematische Abstraktionen
 - ▶ Idee: Billardtisch vereinfachen, Kugelzahl reduzieren
 - ▶ Kugel anstoßen, unendlich laufenlassen
 - ▶ Fällt die Kugel irgendwann in ein Loch?
 - ▶ Idee: andere Tischformen benutzen, z.B. Dreieck

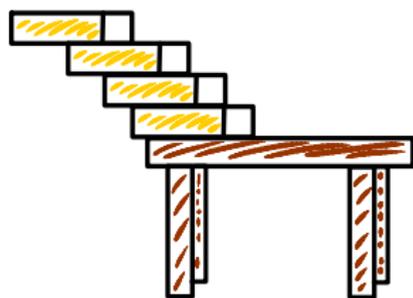


Approximation von Zahlen

- ▶ Wie kann man reelle Zahlen durch Brüche annähern?
 - ▶ Idee: Dezimaldarstellung nehmen, abschneiden und als Bruch mit Nenner 10^n darstellen
 - ▶ Was, wenn man möglichst kleine Nenner haben will?
 - ▶ Beispiel: $\pi = 3,14159\dots \approx \frac{22}{7} = 3,14285\dots$ und
 $\pi \approx \frac{314}{100} = \frac{157}{50} = 3,14$
- ▶ Gibt es bei vorgegebener Nennergröße eine beste Darstellung?
- ▶ Man kann eine Zahl mit ihrer Ziffernfolge im Dezimalsystem identifizieren. Gibt es etwas ähnliches auf Grundlage einer Annäherung durch Brüche?

Bücherstapeln

- ▶ Kann man Bücher so stapeln, dass das letzte Buch vollständig nicht über dem Tisch liegt?
- ▶ Kann man Bücher so stapeln, dass die letzten beiden Bücher vollständig nicht über dem Tisch liegen?
- ▶ Welche Regeln sind beim Stapeln zu beachten?
- ▶ Was ist die schnellste Methode, um eine gewisse Entfernung zu erreichen?



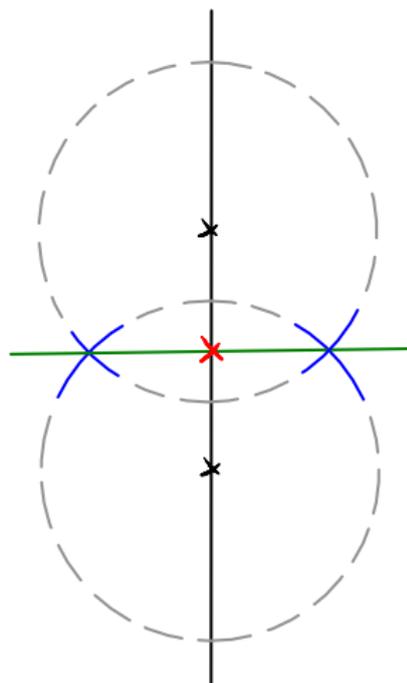
Iteration von Polynomen

- ▶ Situation: komplexes Polynom, z.B.
 $f_c(x) = x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$
- ▶ Wähle Startwert x_0 und bilde Folge (x_i)
nach der Iterationsvorschrift $x_{i+1} = f_c(x_i)$
- ▶ Wie verhält sich die Folge x_i ?
- ▶ Kann man verschiedene Typen von Folgen unterscheiden?
- ▶ Grafische Darstellung?
- ▶ Modifikation: Startwert x_0 festhalten, aber c verändern



Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

- ▶ Lassen sich alle rationalen Zahlen mit Zirkel und Lineal konstruieren?
- ▶ Lassen sich alle reellen Zahlen mit Zirkel und Lineal konstruieren?
- ▶ Lassen sich alle regelmäßigen n-Ecke konstruieren?
- ▶ Wie weit kommt man, wenn man nur einen Zirkel / nur ein Lineal benutzt?
- ▶ Gibt es andere (sinnvolle) Werkzeuge außer Zirkel und Lineal?



Beweise

- ▶ Was sind die Grundbausteine der Mathematik und ihrer Beweise?
- ▶ Wie funktioniert ein mathematischer Beweis?
- ▶ Was muss man überhaupt beweisen?
- ▶ Waren die Beweistechniken bei den Griechen die gleichen wie heute?
- ▶ Kann man jede wahre mathematische Aussage beweisen?

Mathematik und ...

- ▶ Musik:
 - ▶ Lassen sich Töne und Melodien durch Mathematik beschreiben?
- ▶ Natur:
 - ▶ Folgen Tiere und Pflanzen mathematischen Gesetzen?
- ▶ Physik:
 - ▶ Kann man alle Bereiche der Physik mit Mathematik beschreiben?
 - ▶ Hat jeder Bereich der Mathematik eine Anwendung in der Physik?
- ▶ Philosophie:
 - ▶ Welche Beziehung haben Mathematik und Philosophie?

Unendliches

- ▶ Bekannt: es gibt endliche (z.B. $\{1, 2, 3\}$) und unendliche Mengen (z.B. \mathbb{N})
- ▶ Beweis kommt in der Vorlesung: \mathbb{R} ist größer \mathbb{N}
- ▶ Gibt es eine Menge größenmäßig „zwischen“ \mathbb{N} und \mathbb{R} ?
- ▶ Kann man verschiedene Stufen von „Unendlichkeiten“ beschreiben?

Wischmengen

- ▶ Iterative Beschreibung einer Menge:
 - ▶ entferne das mittlere Drittel aus $[0, 1]$
 - ▶ entferne die mittleren Drittel aus den beiden übrig gebliebenen Teilen
 - ▶ usw.
- ▶ Welche Eigenschaften hat diese Menge?
- ▶ Kann man ihr sinnvoll eine Größe / Dimension zuordnen?

